**Trabajo Práctico N° 4:**

**Derivadas.**

**Ejercicio 1.**

*Realizar la derivada por definición de f (x)= + 1 en x= 0.*

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)= = = 0.

**Ejercicio 2.**

*Obtener la derivada por definición de la función f (x)= 2x, para todo valor de x.*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= = 2.

**Ejercicio 3.**

*Hallar la derivada de f (x) en x= 0:*

*f (x)= .*

(x)= =

(x)=

(x)=

(x)=

(x)= = 2x + 0= 2x.

(x)= =

(x)=

(x)=

(x)=

(x)= = -2x - 0= -2x.

(0)= 2 \* 0

(0)= 0.

(0)= -2 \* 0

(0)= 0.

f´ (0)= 0.

Por lo tanto, la derivada de f (x) en x= 0 es 0.

**Ejercicio 4.**

*Derivar las siguientes funciones utilizando reglas:*

**(a)** *f (x)= 5 + 2x + 8.*

f´ (x)= 15 + 2.

**(b)** *f (x)= + 5 - .*

f´ (x)= + 40 - .

**(c)** *f (x)= .*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

**(d)** *f (x)= .*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

**(e)** *f (x)= ( - 2) (x + 4).*

f´ (x)= 2x (x + 4) + ( - 2) \* 1

f´ (x)= 2 + 8x + - 2

f´ (x)= 3 + 8x - 2.

**(f)** *f (x)= ln (x - 4) + 1.*

f´ (x)= \* 1

f´ (x)= .

**(g)** *f (x)= - x.*

f´ (x)= 2x - 1

f´ (x)= 2x - 1.

**(h)** *f (x)= .*

f´ (x)= (4 + 2)

f´ (x)= 2 +

f´ (x)= (2 + 1).

**(i)** *f (x)= cos (x + 1) - .*

f´ (x)= -sen (x + 1) \* 1 - 2x

f´ (x)= -sen (x + 1) - 2x.

**(j)** *f (x)= .*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

**(k)** *f (x)= tan x.*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

**(l)** *f (x)= ln (3 - x) cos .*

f´ (x)= (-1) cos + ln (3 - x) (-sen ) 3

f´ (x)= - 3 ln (3 - x) sen .

**Ejercicio 5.**

*Encontrar la recta tangente a f (x)= + 1 en el punto (2, 5).*

f´ (x)= 2x.

f´ (2)= 2 \* 2

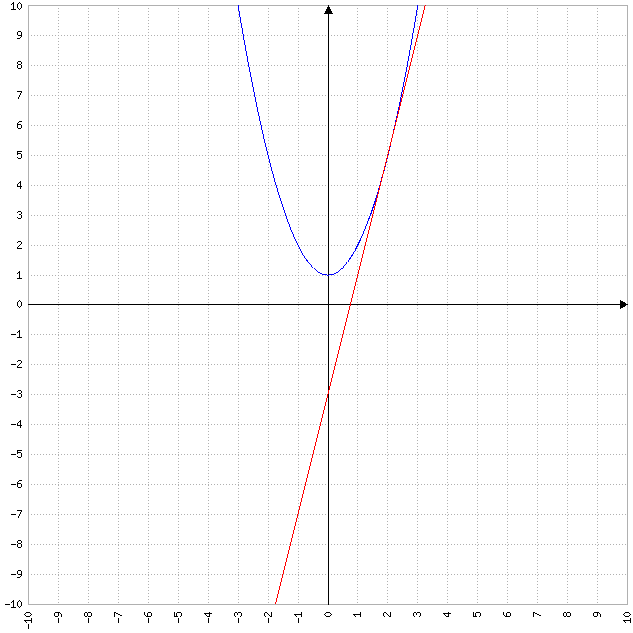
f´ (2)= 4.

y - 5= 4 (x - 2)

y - 5= 4x - 8

y= 4x - 8 + 5

y= 4x - 3.



**Ejercicio 6.**

*Encontrar la recta tangente a h (x)= ln (x - 3) en el punto (5, ln 2).*

h´ (x)= .

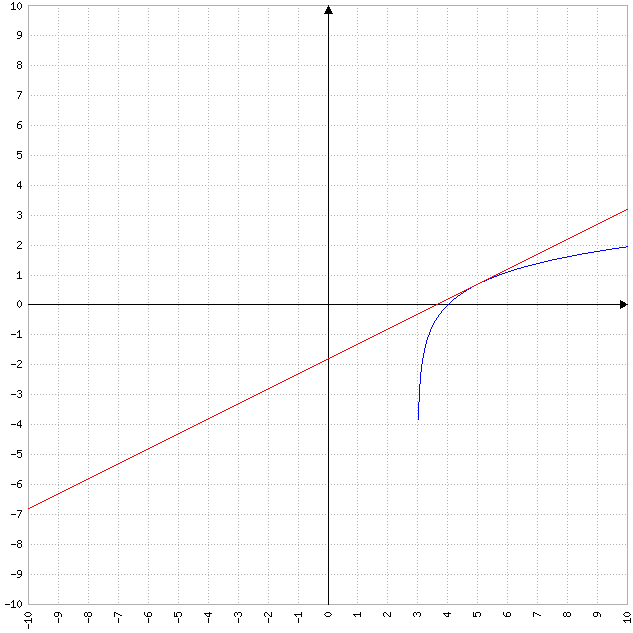
h´ (5)=

h´ (5)= .

y - ln 2= (x - 5)

y - ln 2= x -

y= x - + ln 2.



**Ejercicio 7.**

*Determinar el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente m= 5 de la función f (x)= + 2x + 1.*

f´ (x)= 5

3 + 2= 5

3= 5 - 2

3= 3

=

= 1

=

= 1

x= 1.

f (1)= + 2 \* 1 + 1

f (1)= 1 + 2 + 1

f (1)= 4.

f (-1)= + 2 (-1) + 1

f (-1)= -1 - 2 + 1

f (-1)= -2.

y - 4= f´ (1) (x - 1)

y - 4= 5 (x - 1)

y - 4= 5x - 5

y= 5x - 5 + 4

y= 5x - 1.

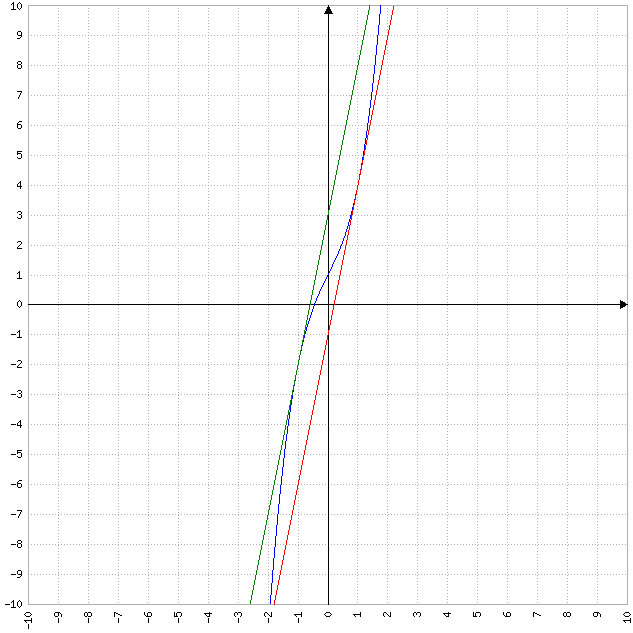
y - (-2)= f´ (-1) (x + 1)

y + 2= 5 (x + 1)

y + 2= 5x + 5

y= 5x + 5 - 2

y= 5x + 3.



**Ejercicio 8.**

*Determinar el punto y la recta tangente con pendiente m= 1 de la función f (x)= + 2.*

f´ (x)= 1

= 1

ln = ln 1

x ln e= 0

x \* 1= 0

x= 0.

f (0)= + 2

f (0)= 1 + 2

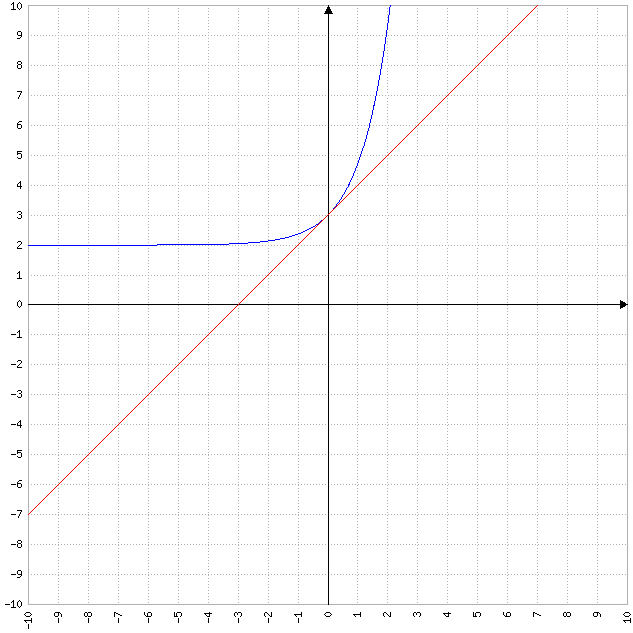
f (0)= 3.

y - 3= 1 (x - 0)

y - 3= 1x

y - 3= x

y= x + 3.



**Ejercicio 9.**

*Hallar f´´ (x) de las funciones (a), (b), (d), (f), (k) del Ejercicio 4.*

**(a)** *f (x)= 5 + 2x + 8.*

f´ (x)= 15 + 2.

f´´ (x)= 30x.

**(b)** *f (x)= + 5 - .*

f´ (x)= + 40 - .

f´´ (x)= + 280 - ()

f´´ (x)= + 280 + .

**(d)** *f (x)= .*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)= .

**(f)** *f (x)= ln (x - 4) + 1.*

f´ (x)= \* 1

f´ (x)= .

f´´ (x)=

f´´ (x)= .

**(k)** *f (x)= tan x.*

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´´ (x)= -2 (-sen x)

f´´ (x)= 2 sen x

f´´ (x)= 2 sen x

f´´ (x)= 2 sen x .

**Ejercicio 10.**

*Hallar las derivadas de todos los órdenes de f (x)= - 3 - 3x - 2.*

f´ (x)= 5 - 9 - 3.

f´´ (x)= 20 - 18x.

f´´´ (x)= 60 - 18.

f´´´´ (x)= 120x.

f´´´´´ (x)= 120.

f´´´´´´ (x)= 0.

**Ejercicio 11.**

*Determinar todos los puntos críticos para cada función:*

**(a)** *f (x)= 6 - .*

= .

f´ (x)= 12x - 3.

f´ (x) x .

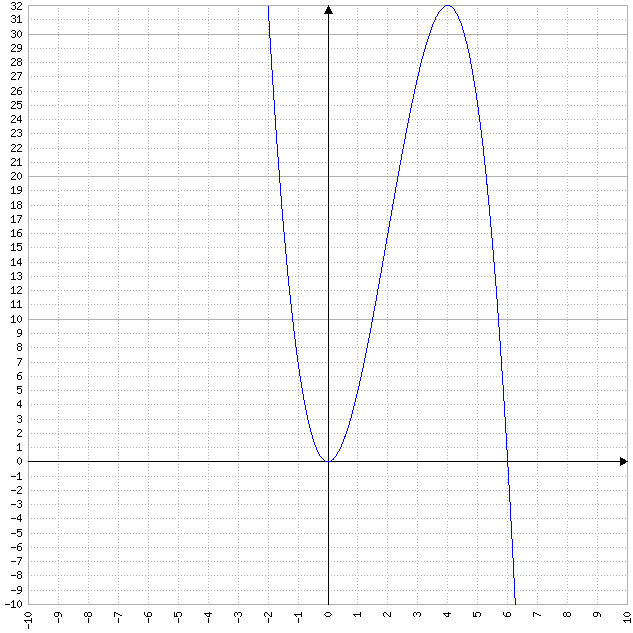
f´ (x)= 0

12x - 3= 0

x (12 - 3x)= 0.

= 0; = 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en = 0 y = 4.



**(b)** *f (x)= + .*

= - {0}.

f´ (x)= 2x - .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

2x - = 0

2x=

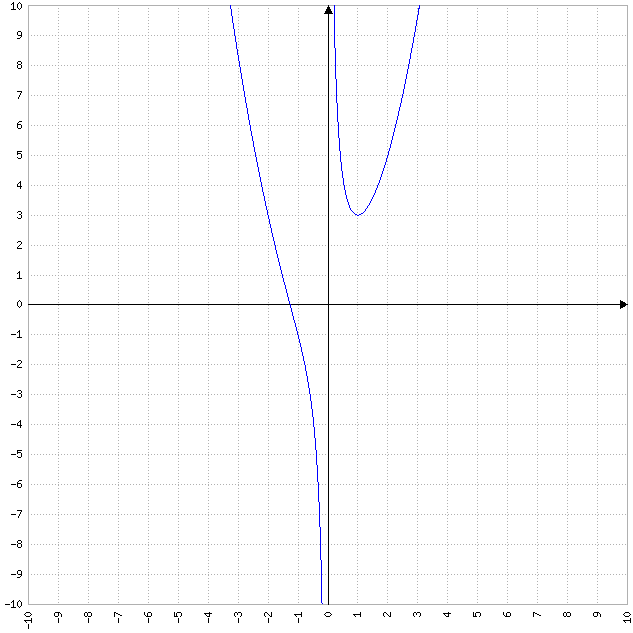
x=

= 1

x=

x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto crítico en x= 1.



**(c)** *f (x)= .*

= - {2}.

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

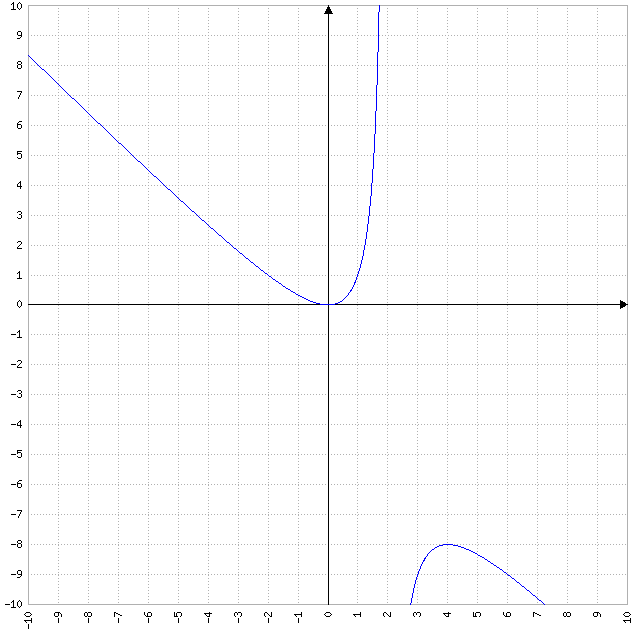
= 0

x (4 - x)= 0

x (4 - x)= 0.

= 0; = 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en = 0 y = 4.



**(d)** *f (x)= .*

= [0, 2].

f´ (x)= (2 - 2x)

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) para x= 2 .

f´ (x)= 0

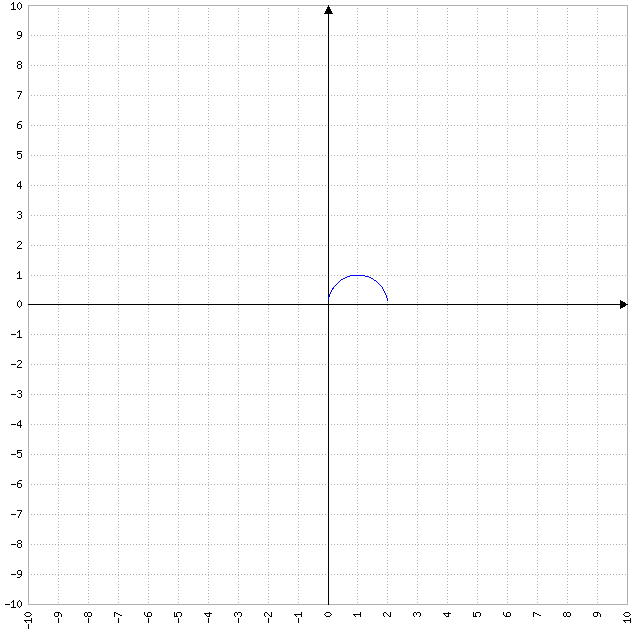
= 0

1 - x= 0

1 - x= 0

x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en = 1 y = 2.



**Ejercicio 12.**

*Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego, graficar la función e identificar los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos.*

**(a)** *f (x)= -x - 4 en [-4, 1].*

f´ (x)= 0

-1 0.

f (-4)= -(-4) - 4

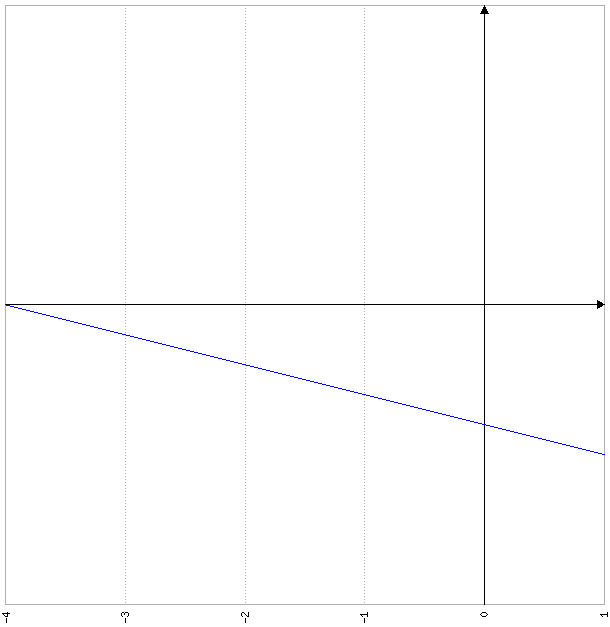
f (-4)= 4 - 4

f (-4)= 0.

f (1)= -1 - 4

f (1)= -5.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (-4, 0) y (1, -5), respectivamente.



**(b)** *f (x)= 4 - en [-3, 1].*

f´ (x)= 0

-2x= 0

x=

x= 0.

f (-3)= 4 -

f (-3)= 4 - 9

f (-3)= -5.

f (0)= 4 -

f (0)= 4 - 0

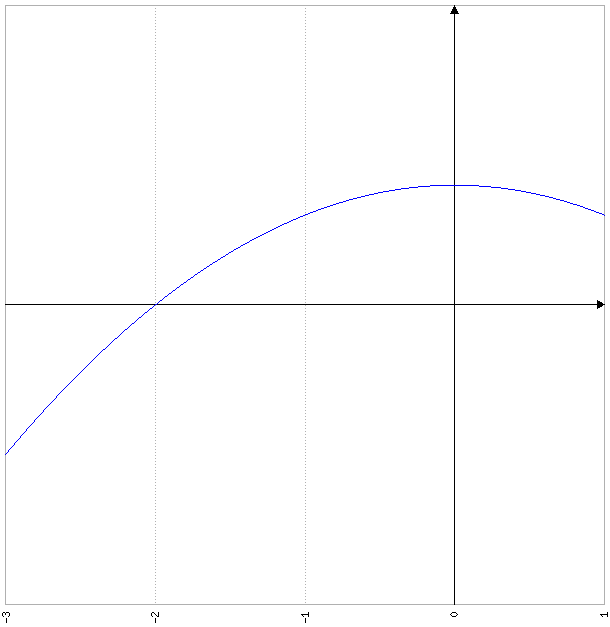
f (0)= 4.

f (1)= 4 -

f (1)= 4 - 1

f (1)= 3.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (0, 4) y (-3, -5), respectivamente.



**(c)** *f (x)= en [, 2].*

f´ (x)= 0

= 0

2= 0

2 0.

f ()=

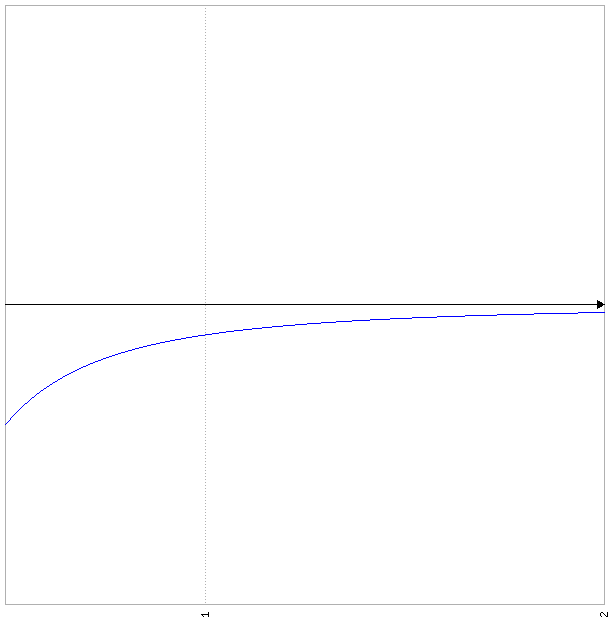
f ()=

f ()= -4.

f (2)=

f (2)= .

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (2, ) y (, -4), respectivamente.



**(d)** *f (x)= en [-2, 1].*

f´ (x)= 0

(-2x)= 0

= 0

= 0

-x= 0

-x= 0

x=

x= 0.

f (-2)=

f (-2)=

f (-2)=

f (-2)= 0.

f (0)=

f (0)=

f (0)=

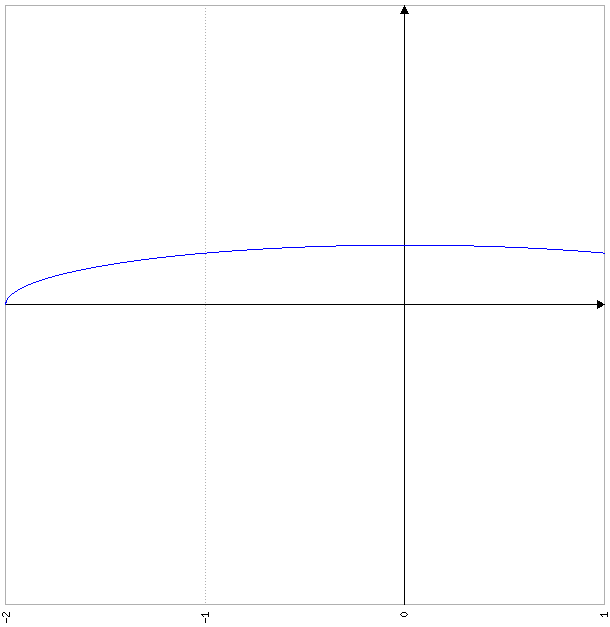
f (0)= 2.

f (1)=

f (1)=

f (1)= .

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo absolutos de f (x) en el intervalo indicado son (0, 2) y (-2, 0), respectivamente.



**Ejercicio 13.**

*Para las siguientes funciones, determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento y los puntos máximos y mínimos relativos.*

**(a)** *h (x)= - + 2.*

= .

h´ (x)= -3 + 4.

h´ (x) x .

h´ (x)= 0

-3 + 4x= 0

x (-3x + 4)= 0.

= 0; = .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, )** | **x=** | **(, +)** |
| VP | -1 | --- | 1 | --- | 2 |
| h´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| h (x) | decreciente | mínimo relativo | creciente | máximo relativo | decreciente |

h (0)= - + 2 \*

h (0)= - + 2 \* 0

h (0)= - + 0

h (0)= 0.

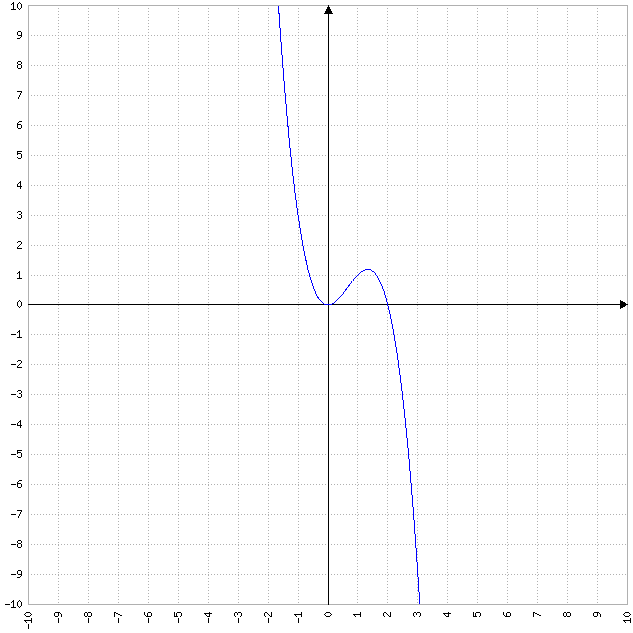
h ()= - + 2

h ()= + 2

h ()= +

h ()= .

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de h (x) son (0, ) y (-, 0) (, +), respectivamente, y los puntos máximo y mínimo relativos de esta función son (, ) y (0, 0), respectivamente.



**(b)** *g (x)= .*

= - {2}.

g´ (x)=

g´ (x)=

g´ (x)= .

g´ (x) x .

g´ (x)= 0

= 0

- 4x + 3= 0

- 4x + 3= 0.

, =

, =

, =

, =

= = = 3.

= = = 1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 1)** | **x= 1** | **(1, 2)** | **(2, 3)** | **x= 3** | **(3, +)** |
| VP | 0 | --- |  |  | --- | 2 |
| g´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g (x) | creciente | máximo relativo | decreciente | decreciente | mínimo relativo | creciente |

g (1)=

g (1)=

g (1)=

g (1)= 2.

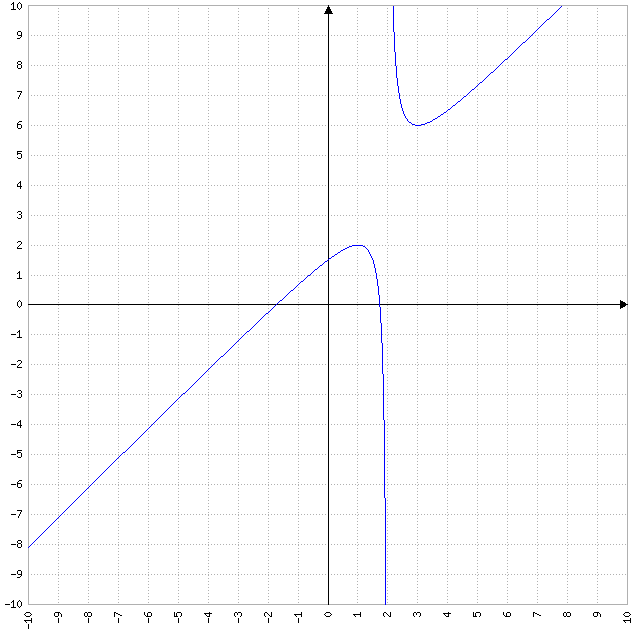
g (3)=

g (3)=

g (3)=

g (3)= 6.

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de g (x) son (-, 1) (3, +) y (1, 2) (2, 3), respectivamente, y los puntos máximo y mínimo relativos de esta función son (1, 2) y (3, 6), respectivamente.



**(c)** *f (x)= .*

= .

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

= 0

3 ( - )= 0

3 ( - )= 0

- =

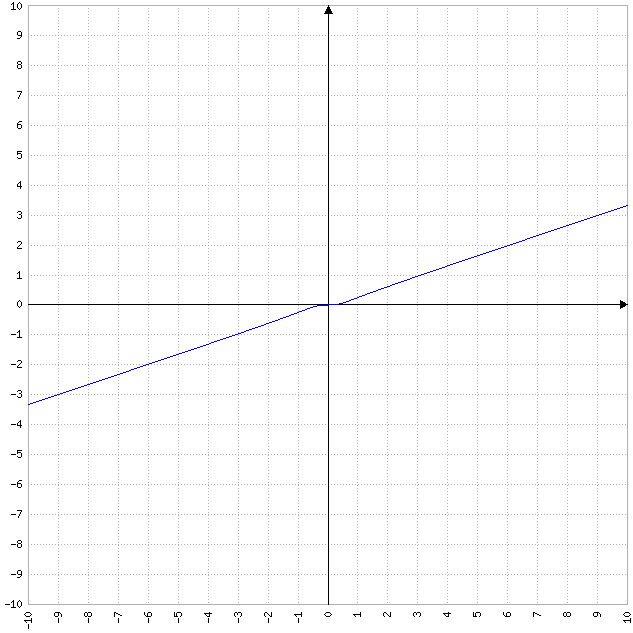
- = 0

( - 1)= 0.

= -1; = 0; = 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, -1)** | **x= -1** | **(-1, 0)** | **x= 0** | **(0, 1)** | **x= 1** | **(1, +)** |
| VP | -2 | --- |  | --- |  | --- | 2 |
| f´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | creciente | no tiene extremo relativo | creciente | no tiene extremo relativo | creciente | no tiene extremo relativo | creciente |

Por lo tanto, f (x) crece en todo su dominio y, por lo tanto, no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

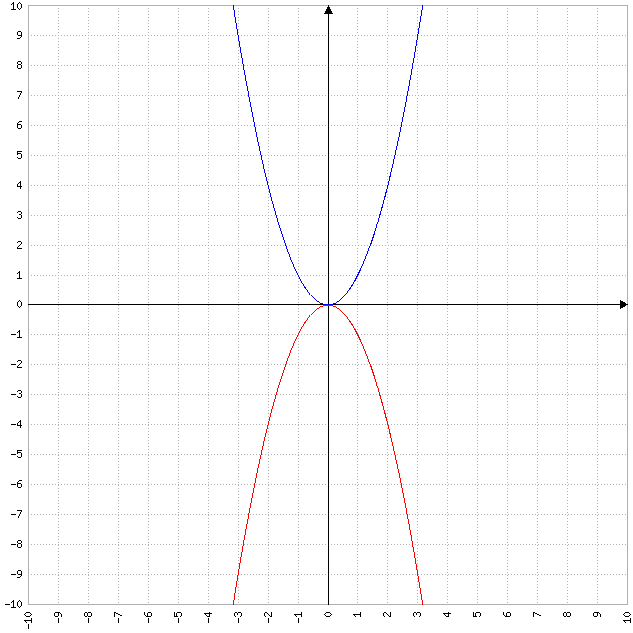


**Ejercicio 14.**

**(a)** *Trazar dos gráficas de funciones continuas y decrecientes. Una de ellas que sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo.*

**(b)** *En cada una de las gráficas, dibujar algunas rectas tangentes, como se hizo en la figura anterior.*

**(c)** *Reflexionar, en forma similar a la que se hizo para las gráficas crecientes, respecto del crecimiento o decrecimiento del valor de las pendientes de esas rectas tangentes, tanto en el caso de la gráfica cóncava hacia arriba como en aquella que sea cóncava hacia abajo.*



En el caso de la gráfica cóncava hacia arriba (gráfica azul), las pendientes de las rectas tangentes, considerándolas de izquierda a derecha, primero, son negativas y decrecen y, luego, son positivas y crecen. En cambio, en el caso de la gráfica cóncava hacia abajo (gráfica roja), las pendientes de las rectas tangentes, considerándolas de izquierda a derecha, primero, son positivas y decrecen y, luego, son negativas y crecen.

**Ejercicio 15.**

*Determinar todos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para cada función:*

**(a)** *f (x)= 3 + 2x.*

= .

f´ (x)= 9 + 2.

f´´ (x)= 18x.

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

18x= 0

x=

x= 0.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -1 | --- | 1 |
| f´´ (x) | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | punto de inflexión | cóncava hacia arriba |

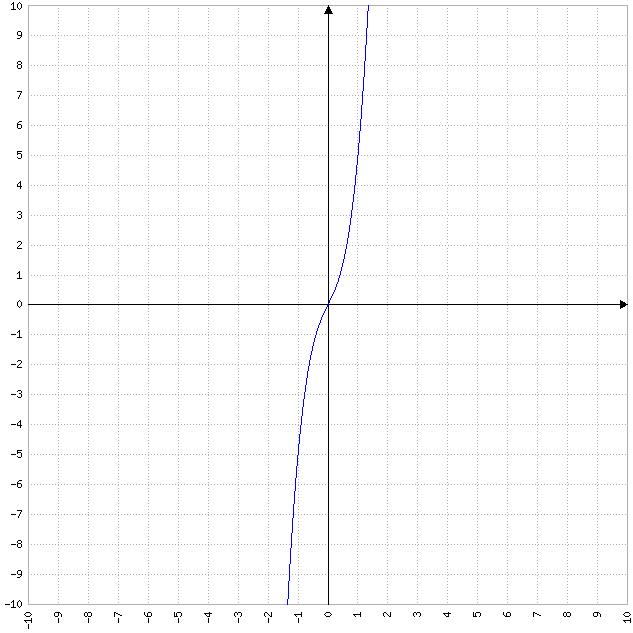
f (0)= 3 \* + 2 \* 0

f (0)= 3 \* 0 + 0

f (0)= 0 + 0

f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en (0, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son (0, +) y (-, 0), respectivamente.



**(b)** *f (x)= 2 + 3.*

= .

f´ (x)= 8 + 9.

f´´ (x)= 24 + 18x.

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

24 + 18x= 0

x (24x + 18)= 0.

= 0; = .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, )** | **x=** | **(, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -1 | --- |  | -- | 1 |
| f´´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | cóncava hacia arriba | punto de inflexión | cóncava hacia abajo | punto de inflexión | cóncava hacia arriba |

f ()= 2 + 3

f ()= 2 + 3 ()

f ()= -

f ()= .

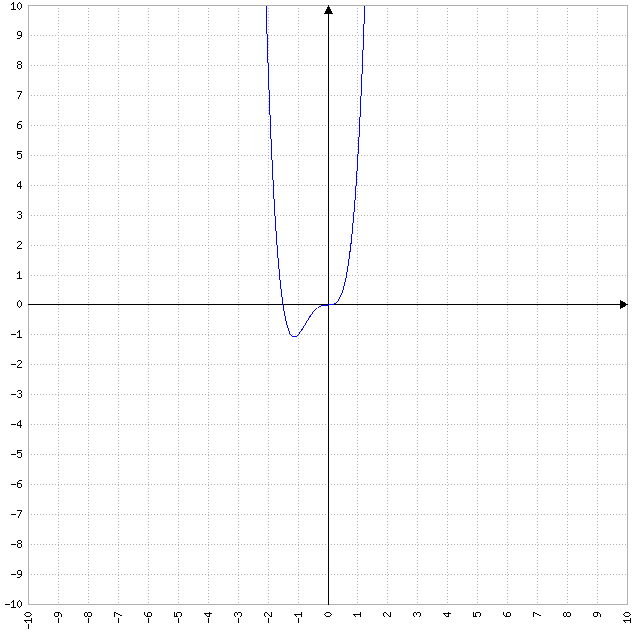
f (0)= 2 \* + 3 \*

f (0)= 2 \* 0 + 3 \* 0

f (0)= 0 + 0

f (0)= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos de inflexión en (, ) y (0, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son (-, ) (0, +) y (, 0), respectivamente.



**(c)** *f (x)= sen x en [-2, 2].*

= .

f´ (x)= cos x.

f´´ (x)= -sen x.

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

-sen x= 0

sen x=

sen x= 0.

= -; = 0; = .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-2, -)** | **x= -** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, )** | **x=** | **(, 2)** |
| VP | -4 | --- | -1 | --- | 1 | --- | 4 |
| f´´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | punto de inflexión | cóncava hacia arriba | punto de inflexión | cóncava hacia abajo | punto de inflexión | cóncava hacia arriba |

f (-)= sen -

f (-)= 0.

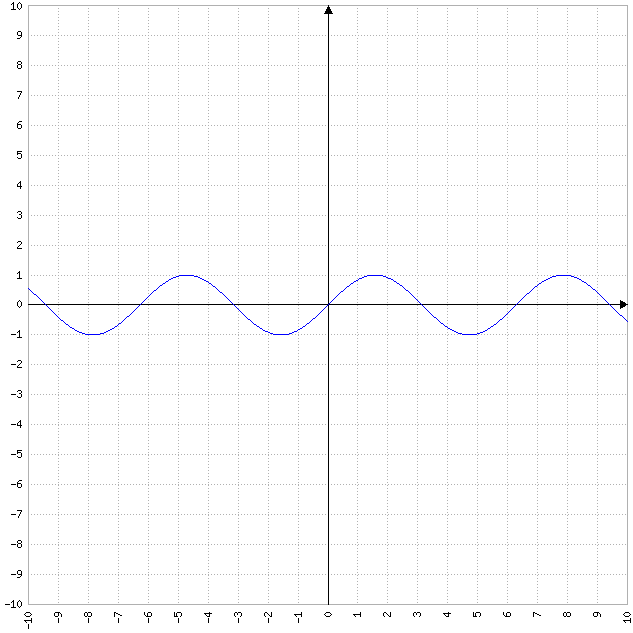
f (0)= sen 0

f (0)= 0.

f ()= sen

f ()= 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos de inflexión en (-, 0), (0, 0) y (, 0) y los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de esta función son (-, 0) (, 2) y (-2, ) (0, ), respectivamente.



**(d)** *f (x)= ln x.*

= (0, +).

f´ (x)= .

f´´ (x)= .

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

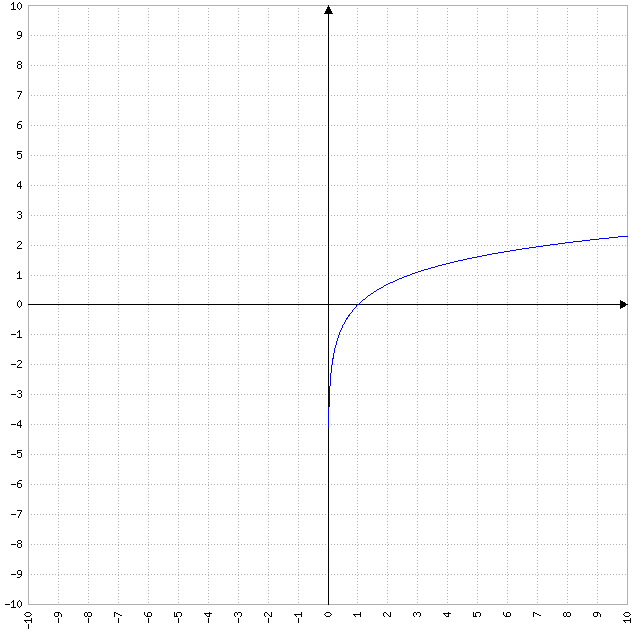
= 0

-1= 0

-1 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Intervalo** | **(0, +)** |
| VP | 1 |
| f´´ (x) | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo |

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia abajo en todo su dominio.



**Ejercicio 16.**

*En caso de que se pueda, usar el criterio de la segunda derivada para corroborar la clasificación de extremos de las funciones del Ejercicio 13.*

**(a)** *h (x)= - + 2.*

h´ (x)= -3 + 4x.

h´´ (x)= -6x + 4.

h´´ (0)= -6 \* 0 + 4

h´´ (0)= 0 + 4

h´´ (0)= 4 0.

h´´ ()= -6 + 4

h´´ ()= -8 + 4

h´´ ()= -4 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de h (x), en donde los puntos máximo y mínimo relativos son (, ) y (0, 0), respectivamente.

**(b)** *g (x)= .*

g´ (x)= .

g´´ (x)=

g´´ (x)=

g´´ (x)=

g´´ (x)=

g´´ (x)=

g´´ (x)=

g´´ (x)= .

g´´ (1)=

g´´ (1)=

g´´ (1)=

g´´ (1)= -2 0.

g´´ (3)=

g´´ (3)=

g´´ (3)=

g´´ (3)= 2 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de g (x), en donde los puntos máximo y mínimo relativos son (1, 2) y (3, 6), respectivamente.

**(c)** *f (x)= .*

f´ (x)= .

f´ (-1)=

f´ (-1)=

f´ (-1)=

f´ (-1)=

f´ (-1)=

f´ (-1)= 0.

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)=

f´ (0)= 0.

f´ (1)=

f´ (1)=

f´ (1)=

f´ (1)=

f´ (1)= 0.

Por lo tanto, usando el criterio de la segunda derivada, se corrobora la clasificación de extremos de f (x), la cual no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

**Ejercicio 17.**

*Realizar, paso a paso, el análisis completo de las funciones siguientes. Luego, graficar en base al análisis realizado.*

**(a)** *f (x)= 2 + 3 + 1.*

(1) Determinar el dominio de la función:

= .

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

Las funciones polinómicas son continuas en . Por lo tanto, f (x) es continua en .

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

= , a .

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas verticales.

= = -.

= = +.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)= 6 + 6x.

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

6 + 6x= 0

6x (x + 1)= 0

x (x + 1)=

x (x + 1)= 0.

= -1; = 0.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en = -1 y = 0.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, -1)** | **x= -1** | **(-1, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -2 | --- |  | --- | 1 |
| f´ (x) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | creciente | máximo relativo | decreciente | mínimo relativo | creciente |

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-, -1) (0, +) y (-1, 0), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

f (-1)= 2 + 3 + 1

f (-1)= 2 (-1) + 3 \* 1 + 1

f (-1)= -2 + 3 + 1

f (-1)= 2.

f (0)= 2 \* + 3 \* + 1

f (0)= 2 \* 0 + 3 \* 0 + 1

f (0)= 0 + 0 + 1

f (0)= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (-1, 2) y (0, 1), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´

no existe:

f´´ (x)= 12x + 6.

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

12x + 6= 0

12x= -6

x=

x= .

Por lo tanto, f´´ (x)= 0 en x= .

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, )** | **x=** | **(, +)** |
| VP | -1 | --- | 0 |
| f´´ (x) | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | punto de inflexión | cóncava hacia arriba |

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (, +) y (-, ), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

f ()= 2 + 3 + 1

f ()= 2 () + 3 + 1

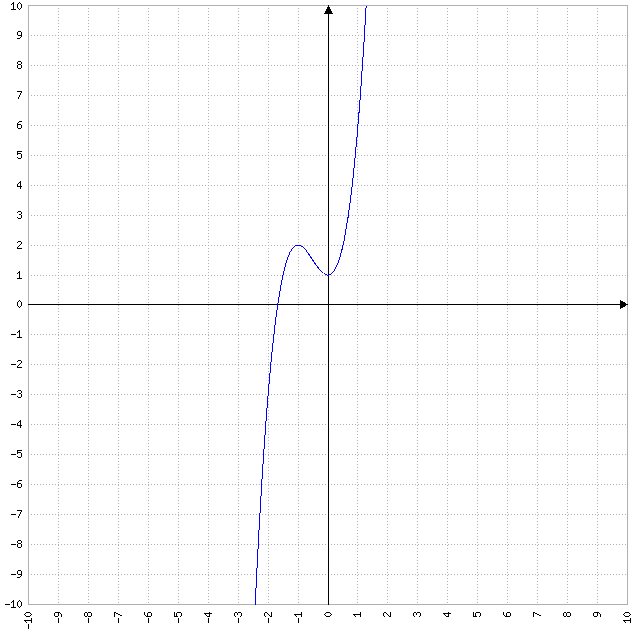
f ()= + + 1

f ()= .

Por lo tanto, f (x) tiene un punto de inflexión en (, ).

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en

el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



**(b)** *f (x)= .*

(1) Determinar el dominio de la función:

= 0

x=

x= 0.

= - {0}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que y, entonces, . Por lo tanto, f (x) es continua en - {0}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

= = -.

= = +.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

= = 0.

= = 0.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en y= 0.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

= 0

-6= 0

-6 0.

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos críticos.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -1 | --- | 1 |
| f´ (x) | 0 | --- | 0 |
| f (x) | decreciente | asíntota vertical | decreciente |

Por lo tanto, f (x) decrece en todo su dominio.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

Dado que decrece en todo su dominio, f (x) no tiene puntos máximos ni mínimos relativos.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´

no existe:

f´´ (x)= .

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

= 0

24= 0

24 0.

Por lo tanto, f´´ (x) 0 x .

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -1 | --- | 1 |
| f´ (x) | 0 | --- | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | asíntota vertical | cóncava hacia arriba |

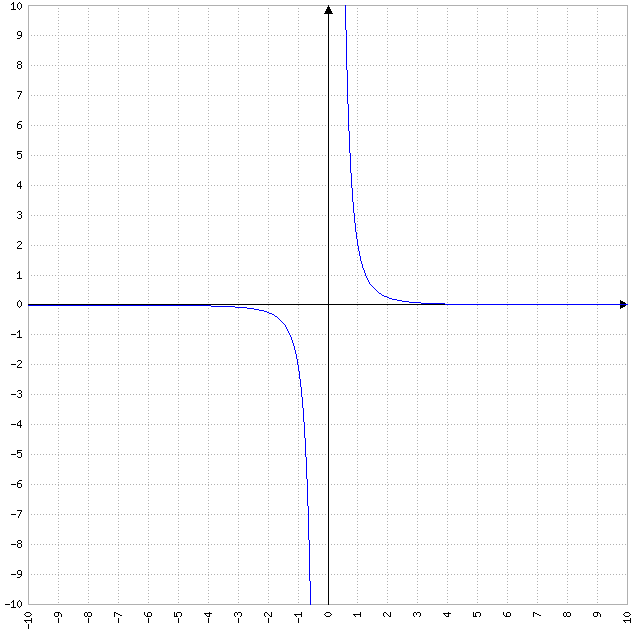
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +) y (-, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en

el análisis desarrollado en los puntos anteriores:

g

**(c)** *f (x)= .*

(1) Determinar el dominio de la función:

x - 1= 0

x= 1.

= - {1}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

f (x) es discontinua inevitable en x= 1, ya que y, entonces, . Por lo tanto, f (x) es continua en - {1}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

= = -.

= = +.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 1.

= = +.

= = -.

Por lo tanto, f (x) no tiene asíntotas horizontales.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

= 0

x (x - 2)= 0

x (x - 2)= 0.

= 0; = 2.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos críticos en = 0 y = 2.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, 1)** | **x= 1** | **(1, 2)** | **x= 2** | **(2, +)** |
| VP | -1 | --- |  | --- |  | --- | 3 |
| f´ (x) | 0 | 0 | 0 | --- | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | creciente | máximo relativo | decreciente | asíntota vertical | decreciente | mínimo relativo | creciente |

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (-, 0) (2, +) y (0, 1) (1, 2), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

f (0)=

f (0)=

f (0)= 0.

f (2)=

f (2)=

f (2)= 4.

Por lo tanto, f (x) tiene puntos máximo y mínimo relativos en (0, 0) y (2, 4), respectivamente.

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´

no existe:

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)= .

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

= 0

2= 0

2 0.

Por lo tanto, f´´ (x) 0 x .

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 1)** | **x= 1** | **(1, +)** |
| VP | -2 | --- | 2 |
| f´ (x) | 0 | --- | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | asíntota vertical | cóncava hacia arriba |

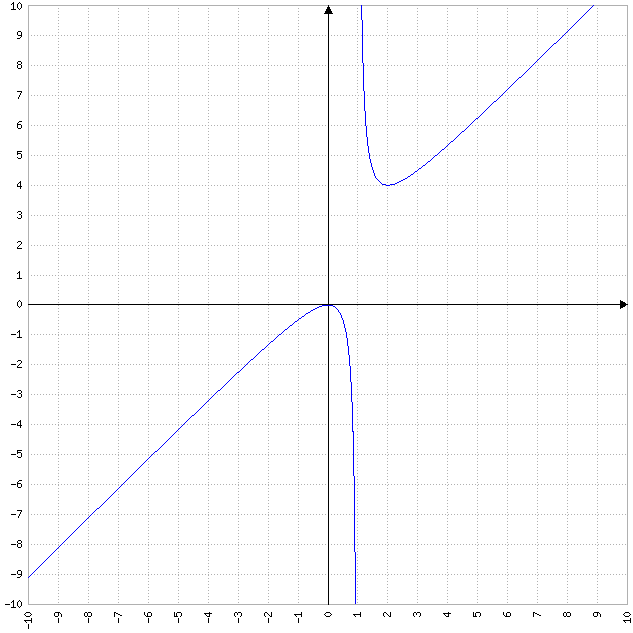
Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (1, +) y (-, 1), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en

el análisis desarrollado en los puntos anteriores:



**(d)** *f (x)= .*

(1) Determinar el dominio de la función:

x= 0.

= - {0}.

(2) Determinar el conjunto donde la función es continua. Donde sea discontinua, clasificar sus discontinuidades:

f (x) es discontinua inevitable en x= 0, ya que y, entonces, . Por lo tanto, f (x) es continua en - {0}.

(3) Determinar las asíntotas verticales y horizontales:

= = -.

= = +.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en x= 0.

= = 0.

= = +.

Por lo tanto, f (x) tiene una asíntota vertical en y= 0.

(4) Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función:

f´ (x)=

f´ (x)= .

f´ (x) x .

f´ (x)= 0

= 0

(x - 1)= 0

(x - 1)= 0

x - 1=

x - 1= 0

x= 1.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto crítico en x= 1.

(5) Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, 1)** | **x= 1** | **(1, +)** |
| VP | -1 | --- |  | --- | 2 |
| f´ (x) | 0 | --- | 0 | 0 | 0 |
| f (x) | decreciente | asíntota vertical | decreciente | mínimo relativo | creciente |

Por lo tanto, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (x) son (1, +) y (-, 0) (0, 1), respectivamente.

(6) Determinar los valores máximos y mínimos relativos:

f (1)=

f (1)=

f (1)= e.

Por lo tanto, f (x) tiene un punto mínimo relativo en (1, e).

(7) Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde f ´´ (x)= 0 o donde f´´

no existe:

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)=

f´´ (x)= .

f´´ (x) x .

f´´ (x)= 0

= 0

( - 2x + 2)= 0

- 2x + 2=

- 2x + 2= 0.

, =

, =

, =

, =

, =

, =

= = = 1 + i.

= = = 1 - i.

Por lo tanto, f´´ (x) 0 x .

(8) Determinar los intervalos de concavidad:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Intervalo** | **(-, 0)** | **x= 0** | **(0, +)** |
| VP | -1 | --- | 1 |
| f´ (x) | 0 | --- | 0 |
| f (x) | cóncava hacia abajo | asíntota vertical | cóncava hacia arriba |

Por lo tanto, los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f (x) son (0, +) y (-, 0), respectivamente.

(9) Determinar si la función presenta puntos de inflexión:

Por lo tanto, f (x) no tiene puntos de inflexión.

(10) Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en

el análisis desarrollado en los puntos anteriores:

